

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro *“Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”* es la parte práctica del libro anterior llamado *“Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *“Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”*. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1:	Señalización para Protección Civil	1
	Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.	
Capítulo 2:	Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble	29
	Christian Boissinotte	
Capítulo 3:	Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones	49
	José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.	
Capítulo 4:	Horas de luz solar	63
	Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.	
Capítulo 5:	Caminando frente al sensor de movimiento	73
	Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 6:	Gráficas dinámicas ligadas	83
	Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 7:	Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales	91
	Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.	
Capítulo 8:	Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización	101
	José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.	
Capítulo 9:	Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones	125
	César Fabián Romero Félix	
Capítulo 10:	Situación 1: Estimando la temperatura	149
	María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 11:	Antenas telefónicas	162
	María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 12:	Visualización matemática y GeoGebra	173
	Fernando Hitt	
Capítulo 13:	Nociones de Aproximación y Tendencia	179
	Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.	
Capítulo 14:	Le Jardin des Citrouilles	187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Actividad didáctica

Christian Boissinotte¹

Problématique et proposition d'apprentissage

On vise à ce que les étudiants (futurs enseignants du secondaire) reconnaissent le potentiel de la modélisation en 3D produite dans un logiciel de géométrie dynamique pour résoudre certains problèmes qui font appel à la visualisation spatiale. On s'attend à ce que les étudiants soient ensuite aptes à favoriser le développement de telles instrumentalisation chez les élèves du secondaire en situation de résolution de problèmes dans un environnement semblable.

Concepts mathématiques impliqués

Généraux: résolution de problèmes, visualisation, géométrie plane, variation, optimisation, modélisation d'une situation réelle ou mathématique, modèle tridimensionnel.

Spécifiques: sens de variation, covariation, fonction de deux variables, graphique d'une fonction de deux variables, optimisation: minimum d'une fonction de coût à deux variables.

Autres concepts ou processus pouvant être sollicités : somme impliquant des taux, minimum d'un ensemble de valeurs, paramètres, valeur d'une expression, relation fonctionnelle à une et à deux variables indépendantes, changement de registre, optimisation par les dérivées dans un module de calcul symbolique.

Niveau d'étude

Programme universitaire de premier cycle : Baccalauréat en enseignement au secondaire en mathématiques, formation initiale des enseignants

Nombre d'activités et durée prévue

Une activité de 3 heures

Matériel nécessaire

- Feuilles de travail pour l'étudiant, avec l'énoncé du problème et des espaces prévus pour les notes personnelles, la planification et la résolution;
- Programmes d'études du secondaire et du cégep en mathématique;
- Accès à *GeoGebra* version 5 ou plus pour chaque équipe d'étudiants;
- Rétroprojecteur avec transparents ou projecteur avec dispositif de partage d'écran ou caméra document (pour utiliser dans les discussions de groupe);

¹ Université du Québec à Montréal, Canada.

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

- Optionnellement, on peut avoir du matériel de manipulation comme des boîtes vides, des jeux de boules et tiges pour faire des arêtes de solides, et tout ce qui peut être instrumentalisé dans la classe.

Méthode et recommandation d'enseignement

Nous recommandons à l'enseignant professeur (formateur d'enseignants) de faire vivre l'activité sous une approche ACODESA (**A**pprentissage **c**ollaboratif, **d**ébat **s**cientifique et **a**utoréflexion, Hitt, 2007) qui favorise un usage coordonné de différents registres dans le cadre d'un processus de modélisation.

Cette méthode d'enseignement est une combinaison articulée d'apprentissage collaboratif (Davidson, 1998), de débat scientifique (Alibert et Thomas, 1991; Legrand, 2001), et d'auto-réflexion (Hadamard, 1945/1975). (Description traduite de F. Hitt et González-Martín, 2015. p.6)

Il est préférable d'avoir fait préalablement avec les futurs enseignants une exploration de base des différents modules de *GeoGebra* (algèbre, outils géométriques et graphiques, construction 3D, calcul formel) pour que ces étudiants soient à l'aise avec la ressource et qu'ils puissent considérer qu'il serait utile d'y faire appel pendant la réalisation de l'activité.

L'activité est composée de 6 blocs qui s'inspirent du modèle ACODESA :

- Bloc 1 : Un travail individuel pour étudier la question proposée;
- Bloc 2 : Un travail en équipes où est discuté ce qui a été produit de façon individuelle dans le Bloc 1;
- Bloc 3 : Retour en grand groupe pour partager sur ce qui a été fait dans les différentes équipes;
- Bloc 4 : Un retour en équipes pour avoir l'occasion de se repositionner par rapport à ce qui a été partagé en grand groupe;
- Bloc 5 : Discussion finale en grand groupe;
- Bloc 6 : Travail individuel – une autoréflexion sur ce qui a été retenu par chacun des futurs enseignants.

Le problème présenté place les futurs enseignants dans à une situation réaliste.

Le but de l'activité est de créer un contexte où il semble avantageux de faire appel à une utilisation non triviale de ressources logicielles particulières. Cette activité se situe dans le prolongement de la réflexion sur l'omniprésence de la technologie et sur la façon de l'instrumentaliser pour résoudre des problèmes plus difficiles et différents de ceux que l'on propose traditionnellement.

Comme elle se retrouve en contexte d'une réflexion didactique, les étudiants sont implicitement invités à se créer une représentation ostensive au besoin (boîte vide, cubes, cordes, etc.) ou virtuelle; ils ont en effet accès à un ordinateur avec certains logiciels, dont *GeoGebra* avec son module de graphiques 3D. Ils se demanderont peut-être si ces artefacts sont de ceux qui pourraient aider leurs élèves à apprendre quelque chose d'intéressant et d'utile pour eux. Ils doivent donc adopter en alternance les deux positions épistémologiques d'étudiant universitaire et de futur enseignant au secondaire.

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Concrètement, ils auront à déterminer la manière la plus économique de relier deux endroits par un câble électrique en ayant à leur disposition trois options qui peuvent se combiner. Ce genre de problème est tout à fait nouveau au secondaire car on l'aborde habituellement en résolvant le système donné par l'annulation des dérivées partielles. Comme cette méthode ne s'enseigne que plus tard, au cégep, les élèves devront faire appel à d'autres moyens, comme la modélisation. Faire un schéma précis à main levée peut être assez difficile pour un phénomène qui se produit en trois dimensions. La représentation mentale chez l'élève sera grandement facilitée par la manipulation d'une figure tridimensionnelle alors que la création de celle-ci sera tributaire d'un processus d'analyse et de compréhension de la situation problème. Les futurs enseignants devront évaluer s'ils donnent aux élèves un fichier avec la construction déjà faite ou s'ils pensent qu'ils apprendront quelque chose d'utile à la résolution d'un plus grand nombre de problèmes en prenant le temps de créer eux-mêmes le modèle géométrique. Les difficultés seront probablement reliées à cette construction elle-même ainsi qu'à la méthode d'obtention d'une solution (donnée par action directe sur le modèle et une vision synthétique, ou encore par la traduction algébrique du comportement du modèle et une approche analytique dans ce registre).

La situation initiale serait un exercice d'application pour des étudiants de cégep mais une vraie situation problème au secondaire, sauf peut-être quand on fait appel à la technologie, car la difficulté consiste à trouver le minimum sans avoir accès au concept de dérivée.

SITUATION INITIALE (problème-type, s.d.)

1. On veut relier un câble électrique d'un point C à la surface d'un terrain à un relais B situé sous terre. Cependant, le relier en ligne droite supposerait de l'enfouir entièrement sous terre; or le coût pour un câble enfoui est supérieur à une même longueur de câble installée en surface. On pourrait aussi l'amener en A, à la verticale de la cible B et creuser ensuite vers le bas jusqu'à B. Mais ce n'est pas non plus la solution la plus économique car la longueur de câble est alors maximale, ce qui vient faire perdre l'avantage de l'économie gagnée en surface. Le problème est donc de trouver la configuration la plus économique, en fonction de la position du point D sur le chemin de C à A où on débutera à creuser en ligne droite vers B, et des coûts respectivement en surface et sous terre de l'acheminement du câble.

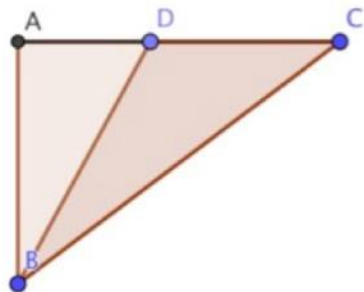


Figure 1 : représentation de la situation initiale

SITUATION PROBLÈME (créée par l'auteur du texte)

2. Si l'on suit une route existante, le tracé en surface coûtera encore moins cher car les véhicules y auront facilement accès. Alors comment exploiter cette information pour minimiser les coûts?

VARIABLES DIDACTIQUES

Pour contextualiser un peu mieux les connaissances sur la situation, on décide de poser des valeurs choisies arbitrairement pour les distances et les coûts de chaque type d'installation. Dans tous les cas, on pourrait considérer que la distance de C à B est de 50 mètres et que le point B se situe à 30 mètres de profondeur. On suppose aussi que le terrain est plat. On considère les coûts de l'installation sous terre à 700\$ le mètre, alors qu'en surface, c'est plutôt 400\$ le mètre, sauf si on suit une route. Dans ce cas le coût est de 300\$ le mètre.

GÉNÉRALISATION DU MODÈLE (À PROPOSER EN DEVOIR)

Étudier la variation de la solution si l'on considère les valeurs que l'on vient d'indiquer comme des paramètres modifiables. Doit-on tout recommencer le travail si certaines de ces données diffèrent (changement de coût, du point de départ, etc.)? Le modèle permet-il de répondre à la question dans le cas général?

Bloc 1 : Un travail individuel pour étudier la question proposée (15 minutes)

Dans cette première partie, les enseignants en formation vont tenter de s'approprier la situation et d'amorcer une résolution du problème de façon individuelle avec les outils dont ils disposent. On leur demande de pouvoir adopter en fait deux positions épistémologiques différentes au cours de cette réflexion, soit celle d'étudiant universitaire qui doit résoudre un problème, mais aussi celle du futur enseignant qui anticipe et imagine les stratégies que leurs élèves du secondaire pourraient mettre de l'avant. Dans le premier cas, ils chercheront parmi les savoirs et savoir-faire à leur disposition ceux qui leur permettraient d'avancer vers une réponse. Dans le second cas, leur réflexion portera sur les heuristiques susceptibles d'être mises en œuvre par leur élèves, considérant les acquis que les programmes d'études permettent d'espérer à ce niveau (2^e cycle du secondaire, 14 ans à 17 ans).

Pour les aider, ces programmes de formation seront distribués aux étudiants; ils auront ainsi accès aux concepts en jeu aux différents niveaux scolaires. Ils devront également procéder à une analyse didactique de la situation. Voici les questions qui leur sont posées dans ce premier bloc :

1. Quelle stratégie utiliserais-tu pour avoir une vision claire du problème et de ce qui est demandé? À quel niveau scolaire crois-tu que cette stratégie serait accessible?
2. Réalise un schéma qui représente la situation en indiquant clairement tous les éléments connus.
3. Que faudrait-il déterminer pour pouvoir progresser vers la solution? Quelles sont les méthodes possibles pour déterminer ces éléments? À quel niveau scolaire chacune de ces méthodes est-elle accessible?

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

La question 2 demande aux étudiants de schématiser le problème. La figure 2 donne une possible schématisation de la situation problème (pour la situation initiale, il suffit de considérer le cas où la distance de F à C est nulle):

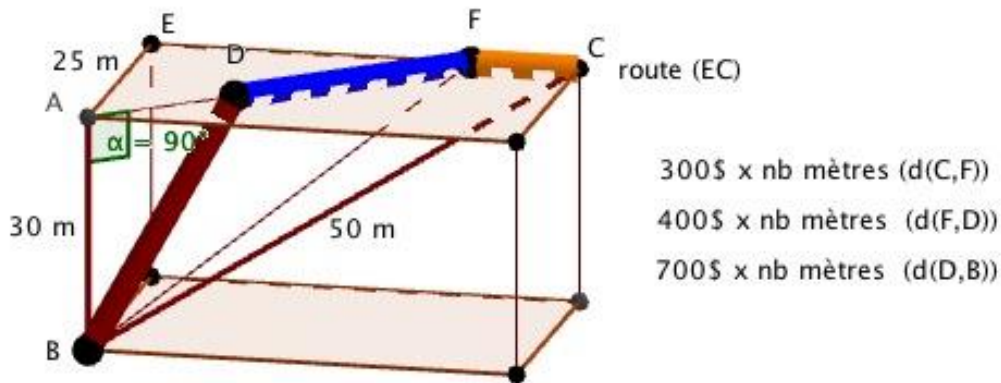


Figure 2 : modélisation de la situation problème

Il est à remarquer que c'est intentionnellement que la distance de A à la route EC n'est pas précisée, dans le but d'activer un processus de contrôle chez les étudiants. Ils devront réagir d'une façon ou d'une autre pour faire face à cette lacune (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015).

Bloc 2 : Un travail en équipes où est discuté ce qui a été produit de façon individuelle dans le Bloc 1 (20 minutes)

Après une relecture du problème, pour s'assurer d'une compréhension commune au sein de chaque équipe, on confronte les interprétations individuelles de la tâche. Les équipiers débattent de la façon de la réaliser, et plus particulièrement des pistes d'action qu'ils ont envisagées. Ils mettent en commun leurs idées sur la façon dont les élèves du secondaire seraient susceptibles de procéder ainsi que les savoirs qu'il leur serait nécessaire de mobiliser.

Parmi les approches « naïves », on pourrait faire une boîte à l'échelle, un genre de maquette, et multiplier les mesures par le coût rattaché à chaque partie du trajet ainsi que par le facteur d'échelle, bien sûr.

En mesurant et en calculant un nombre de cas limité, les étudiants peuvent estimer une réponse approximative. Mais la démarche est très laborieuse et imprécise et implique beaucoup de tâtonnements et de calculs répétitifs. Les étudiants vont être amenés à se questionner sur l'apport de la calculatrice. Voici les questions proposées dans ce bloc :

4. Comparez vos réponses en 1., 2. et 3. du bloc 1. Avez-vous un portrait clair de la situation? Pouvez-vous énoncer explicitement le but visé?
5. Entendez-vous sur un plan d'attaque pour faire avancer la résolution du problème en précisant ce que la géométrie et l'algèbre peuvent apporter respectivement (à vous et aussi à vos élèves). Allez-vous privilégier une approche papier-crayon-calculatrice ou un usage plus particulier de la technologie?

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Bloc 3 : Retour en grand groupe pour partager sur ce qui a été fait dans les différentes équipes (20 minutes)

Le formateur d'enseignants aura ici pour objectif de rendre visibles au groupe les différentes démarches adoptées par les équipes d'étudiants universitaires dans leur rôle d'apprenant et en tant que futurs enseignants qui tentent d'anticiper ce que les élèves du secondaire peuvent faire.

Chaque équipe va présenter les réflexions qui ont émergé de leurs discussions. Un retour en groupe permettra de verbaliser les limites des approches tentées. On évoquera sûrement la construction d'une fonction à 2 variables (la 3^e mesure est déterminée par le choix des 2 autres; de plus, la première variable a une incidence sur le domaine de la deuxième) dont il faudra trouver la valeur minimale (coût). La construction de cette équation en elle-même constitue un défi pour les étudiants de 2^e cycle du secondaire (14 à 16 ans) car elle nécessite d'utiliser trois fois la relation de Pythagore avec des quantités parfois inconnues et dans des plans différents de l'espace. Il se pourrait très bien que les étudiants n'aient pas encore déterminé l'équation finale à ce stade-ci ou même qu'ils n'aient pas l'intention de la déterminer en ayant comme objectif de travailler dans le contexte d'une réplique manipulable de la réalité. D'ailleurs, le premier choix fait passer du modèle figural à un modèle algébrique et s'inscrit donc dans une démarche de conversion entre registres sémiotiques de représentation (Duval, 1993).

Pour le bénéfice du lecteur, je donne ici une construction possible de l'équation, basée sur une analyse théorique du modèle par algébrisation (Voir figure 2 plus haut pour mieux suivre les étapes).

On aura sûrement reconnu que la fonction de coût à optimiser (minimiser) est

$$C(x, y) = d(C, F) \times 300 + d(F, D) \times 400 + d(D, B) \times 700$$

On peut utiliser directement les distances données par *GeoGebra* et observer comment varie la valeur de la fonction quand on change ces distances mais on peut aussi établir un modèle algébrique par conversion du modèle figural.

Posons $d(C, F) = x$ et $d(F, D) = y$. Il faut exprimer $d(D, B)$ en fonction de x et y . Comme DAB est un triangle rectangle, il suffit de connaître les deux cathètes et d'utiliser la relation de Pythagore. L'une vaut 30 et l'autre est y de moins que la $d(A, F)$.

Pour connaître la $d(A, F)$ il faut connaître les mesures des cathètes du triangle rectangle FEA. L'une vaut 25 (mais on ne le dit pas immédiatement, voir juste avant le bloc 2, plus haut) et l'autre vaut x de moins que $d(C, E)$, il reste donc à déterminer cette dernière distance. On peut la trouver à l'aide du triangle rectangle CAB à la condition de connaître $d(A, E)$, distance de la route à la verticale du point de jonction. Les étudiants vont sûrement s'inquiéter de la donnée manquante et devront décider s'ils posent un paramètre ou une valeur particulière, comme 25 m. Ils peuvent aussi demander une proposition au formateur.

Toutes les valeurs étant ainsi déterminées, on peut construire l'équation. La relation de Pythagore fait intervenir des mesures de segments dans les triangles rectangles.

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

$m\overline{AC} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$; on avait reconnu le triplet de Pythagore 3,4,5 décuplé.

$$m\overline{CE} = \sqrt{40^2 - 25^2} = \sqrt{1600 - 625} = 5\sqrt{39}$$

$$m\overline{EF} = m\overline{CE} - m\overline{CF} = m\overline{CE} - x$$

$$m\overline{AF} = \sqrt{m\overline{EF}^2 + 25^2}$$

$$m\overline{AD} = m\overline{AF} - m\overline{FD} = m\overline{AF} - y$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{m\overline{AD}^2 + 30^2}$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{(m\overline{AF} - y)^2 + 30^2}$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{\left(\sqrt{m\overline{EF}^2 + 25^2} - y\right)^2 + 30^2}$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{m\overline{EF}^2 + 25^2 + y^2 - 2y\sqrt{m\overline{EF}^2 + 25^2} + 30^2}$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{(5\sqrt{39} - x)^2 + 1525 + y^2 - 2y\sqrt{(5\sqrt{39} - x)^2 + 25^2}}$$

$$m\overline{DB} = \sqrt{x^2 - 10x\sqrt{39} + 975 + 1525 + y^2 - 2y\sqrt{x^2 - 10x\sqrt{39} + 975} + 625}$$

En effectuant les substitutions à la chaîne, on obtient l'équation finale :

$$C(x, y) = m\overline{CF} \times 300 + m\overline{FD} \times 400 + m\overline{DB} \times 700$$

$$C(x, y) = 300x + 400y + 700 \sqrt{30^2 + \left(\sqrt{(\sqrt{50^2 - (30^2 + 25^2)} - x)^2 + 25^2} - y\right)^2}$$

ou, en complétant les calculs: (La forme ci-dessus est intéressante car elle permettrait de remplacer les nombres par les mesures symboliques des mêmes segments en une paramétrisation généralisante du modèle.)

$$C(x, y) = 400y + 300x + 700 \sqrt{y^2 - 2y\sqrt{(x^2 - 10\sqrt{39}x + 1600)} + x^2 - 10\sqrt{39}x + 2500}$$

Le cas limite où l'on creuse en partant en ligne droite vers la cible: $C(0,0) = 35000$.

Celui où on demeure dans un même plan (comme dans la situation originale mais avec y au lieu de x); on avance de y en surface avant de plonger:

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

$$C(0, y) = 400y + 700\sqrt{y^2 - 80y + 2500}$$

Avec $y = 0$ on retrouve la situation où on suit la route et on creuse vers la cible à partir d'un point sur la route. L'équation se réduit à ceci:

$$C(x, 0) = 300x + 700\sqrt{x^2 - 10\sqrt{39}x + 2500}$$

Quant à la façon de trouver le minimum de la fonction à deux variables, sans faire appel aux dérivées partielles (niveau cégep), c'est le défi suivant que les équipes devront surmonter. Certains proposeront que la méthode par tâtonnement pourrait être rendue plus efficiente par la création d'un modèle manipulable dans *GeoGebra* 3D et permettrait d'éviter toute cette algèbre. S'ils obtiennent une réponse précise au cent près, ou même au dollar près, pourrait-on leur donner raison?

Bloc 4 : Un retour en équipes pour avoir l'occasion de se repositionner par rapport à ce qui a été partagé en grand groupe (50 minutes)

De retour en équipes, si ce n'est pas déjà fait, certains attaqueront la suite du problème en cherchant l'équation algébrique fonctionnelle dont il faut trouver le minimum et d'autres s'attaqueront au problème par une modélisation figurale de la situation dans *GeoGebra* 3D. Mais précisons que la recherche de la fonction peut être facilitée par cette même modélisation figurale. Ils devront trouver une échelle convenable (ou ajuster les axes) et permettre la variation dynamique des variables en jeu. Ils auront à créer un calcul qui fait intervenir les longueurs réelles représentées par les segments, pondérées par leurs coûts respectifs de construction dans la réalité. Ils devront aussi trouver une façon de présenter le résultat.

En variant la position d'un seul point à la fois (F et D) par manipulation directe du modèle, ils pourront trouver une valeur minimum, qu'ils pourront minimiser à nouveau en agissant sur l'autre point. Quelques passages d'un point à l'autre seront nécessaires pour trouver la plus petite valeur que *GeoGebra* est en mesure de calculer. (Il est cependant inutile de calculer beaucoup de décimales car la réponse finale est un montant d'argent.)

Dans un essai partant de $x = 0$ et $y = 0$ et en déplaçant d'abord le point F et ensuite D alternativement, on est à moins de 0,59\$ de la réponse finale après 7 ajustements de la sorte. Après 12, le coût en dollars et cents ne bouge plus et se stabilise à 33 215,56\$ (voir figure 3). C'est la réponse finale sans algèbre et sans heuristique particulière, simplement en laissant « parler » le modèle.

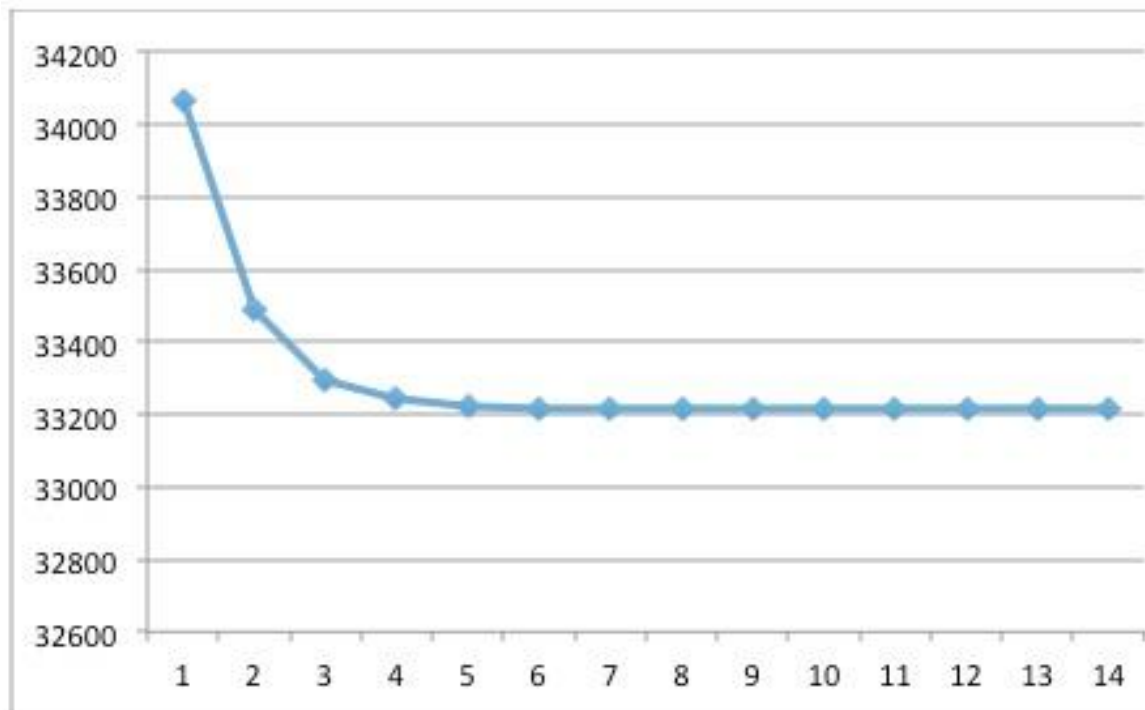


Figure 3: convergence vers une réponse en fonction du nombre de manipulations directes du modèle dans la situation problème

Les étudiants pourraient se demander pourquoi cet aller-retour a été nécessaire et en discuter, sinon la suggestion de ce questionnement pourrait venir du formateur. Une approche visuelle, en alternant les directions, semble utile pour en comprendre la raison. Mais serait-elle suffisante? On pourrait aller plus loin avec des étudiants de cégep et se demander si cette méthode demeurerait fiable en changeant des paramètres de la situation.

Une autre façon de procéder est de créer un plan $z = t$ où le paramètre t est manipulable par un curseur. Il s'agit de trouver la position du plan qui n'aura qu'un seul point comme intersection avec la surface exprimée par l'équation dont nous avons discuté au bloc 3 (voir figure 4 plus bas). Cela est difficilement atteignable car ça fait intervenir des algorithmes internes dont on ne peut modifier le niveau de précision que jusqu'à un certain point. Il faut aussi zoomer l'écran et modifier l'échelle de l'axe des cotes en z en divisant les valeurs par 1000. Tout cela fait intervenir d'autres rouages internes qui sont tributaires des choix des programmeurs. Le meilleur résultat que j'ai pu obtenir est à 3 chiffres significatifs, soit 33,200, soit 33200\$. Il n'y a quand même qu'une différence de 15,56\$, pas de quoi perdre son emploi!

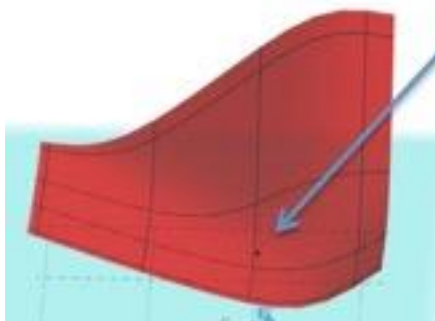


Figure 4: obtention manuelle du plan tangent horizontal à la surface qui représente la fonction à minimiser

Bloc 5 : Discussion finale en grand groupe (30 minutes)

De retour en groupe, on pourra partager les diverses stratégies et comparer les réponses s'il y a lieu, en discutant aussi des cas limites (voir à la fin du bloc 3 plus haut). Ceux qui ont utilisé l'approche algébrique ont peut-être cherché le plan horizontal qui touche au point le plus bas de la surface qui représente la fonction à deux variables, comme dans l'exemple illustré à la figure 4 ci-haut, ou ont tenté d'obtenir une réponse avec le module CAS (calcul symbolique) pour trouver ce minimum en se fiant aux fonctions programmées de *GeoGebra*.

Ceux qui ont utilisé l'approche par approximations successives ont peut-être tenté de faire tracer le lieu d'un point P de coordonnées $(x, y, C(x,y)/1000)$ quand on fait varier alternativement x seulement et y seulement, mais on ne peut pas obtenir un lieu avec deux degrés de liberté (surface). Ça pourrait aider de faire tracer plusieurs lieux en créant des copies des points mobiles, mais c'est aussi une approche laborieuse et imprécise. Certains se demanderont peut-être si *Wolfram Alpha* et *Maple* pourraient faire cette représentation. On peut cependant arriver à une réponse précise en utilisant la fonction « Enregistrer dans tableur » et en se basant sur le nouveau minimum à chaque étape pour bouger l'autre point. Un autre moyen consiste à activer la trace du point P , avec l'axe des z vers le haut, et faire varier à loisir la position des deux points mobiles par animation, avec des incréments différents. On arrive à placer un plan tangent assez près de la trace bien que ce ne soit pas aussi précis.

Après avoir fait cet inventaire des démarches des équipes, une réponse théorique pourra être obtenue par l'enseignant par l'annulation des dérivées partielles pour la comparer avec ce que les étudiants réussissent à obtenir (voir figure 5 plus bas). Il pourra présenter cette approche à la fin en utilisant le module de calcul formel en précisant que cette approche n'est pas disponible au secondaire mais qu'on peut en acquérir une certaine compréhension visuelle. En effet, au point le plus bas d'une surface localement continue, toutes les droites tangentes passant par ce point appartiennent au plan tangent horizontal et ont donc une pente nulle dans le plan de tangence perpendiculaire contenant cette droite. Or la dérivée évaluée en un point (et dans une direction) équivaut à la pente de la tangente en ce point de la surface et dans cette direction.

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Dérivée[p, x]=0 $\rightarrow \frac{1}{1000} \left(-700 (-x + 5\sqrt{39}) \frac{-y + \sqrt{(-x + 5\sqrt{39})^2 + 625}}{\sqrt{(-x + 5\sqrt{39})^2 + 625} \sqrt{(-y + \sqrt{(-x + 5\sqrt{39})^2 + 625})^2 + 900}} + 300 \right) = 0$
Dérivée[p, y]=0 $\rightarrow \frac{1}{1000} \left(-700 \cdot \frac{-y + \sqrt{(-x + 5\sqrt{39})^2 + 625}}{\sqrt{(-y + \sqrt{(-x + 5\sqrt{39})^2 + 625})^2 + 900}} + 400 \right) = 0$
{55, 56} Résoudre: { {x = 2.8776545163, y = 16.90712858624} }
q(x, y):=MembreDroite[Elément[Elément[{x = 2.8776545163, y = 16.90712858624}],1],1]] $\rightarrow q(x, y) := \frac{28776545163}{10000000000}$
s(x, y):=MembreDroite[Elément[Elément[{x = 2.8776545163, y = 16.90712858624}],1],2]] $\rightarrow s(x, y) := \frac{825543388}{48828125}$
n(28776545163 / 10000000000, 825543388 / 48828125) ≈ 33215.56321487

Figure 5: résolution analytique brute avec les dérivées partielles

En effet, partout ailleurs qu'en un maximum ou un minimum d'une surface continue, il y aura des tangentes qui ne seront pas horizontales. Cela signifie que la pente de ces droites, donc la dérivée dans la direction considérée, ne sera pas nulle. Cette institutionnalisation sera l'occasion d'évaluer le degré de précision qu'il a été possible d'atteindre avec les approches heuristiques. Nous avons constaté en particulier que l'approche d'ajustement graduel des distances donnait une précision bien supérieure à ce que l'on attendait, soit la même valeur qu'avec les dérivées, en dollars et cents.

Bloc 6 : Travail individuel – une autoréflexion sur ce qui est retenu par chacun des futurs enseignants

Un document de réflexion sera remis aux étudiants pour consigner ce dont ils se souviennent par rapport au déroulement de l'activité et quelles conclusions ils en tirent pour un enseignement au secondaire dans un environnement où la technologie est disponible. Ce travail pourra être fait à la maison mais il est souhaitable de prendre quelques minutes de rappel silencieux après l'activité pour faciliter l'évocation ultérieure des apprentissages (Vianin, 2009).

Références

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65. Repéré à https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf
- Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201-219. Repéré à <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/18322/Hitt-GonzalezMartin-2015-ESM-post.pdf?sequence=1>
- Hitt, Fernando. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. Dans M. Baron, D. Guin et L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris: Hermès.
- Saboya, M., Bednarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 61-100.
- Vianin, P. (2009). *L'aide stratégique aux élèves en difficulté scolaire: comment donner à l'élève les clés de sa réussite*. Bruxelles: De Boeck Supérieur.

Voir le document à distribuer aux étudiants/futurs enseignants (page suivante).

Activité : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Nom: _____ Groupe: _____ Date: _____

Membres de l'équipe:

INSTRUCTIONS

Réfléchis à la situation problème soumise d'abord de façon individuelle, puis en équipe.

Indique toujours tes réflexions sur tes feuilles de travail, même quand tu travailles en équipe.

Vous devez porter une double lunette, soit celle sur votre engagement dans la tâche en tant qu'étudiant universitaire et aussi en tant que futur enseignant au secondaire qui anticipe ce que ses élèves pourraient tenter.

SITUATION INITIALE

1. On veut relier un câble électrique d'un point C à la surface d'un terrain à un relais B situé sous terre. Cependant, le relier en ligne droite supposerait de l'enfouir entièrement sous terre; or le coût pour un câble enfoui est supérieur à une même longueur de câble installée en surface. On pourrait aussi l'amener en A, à la verticale de la cible B et creuser ensuite vers le bas jusqu'à B. Mais ce n'est pas non plus la solution la plus économique car la longueur de câble est alors maximale, ce qui vient faire perdre l'avantage de l'économie gagnée en surface. Le problème est donc de trouver la configuration la plus économique, en fonction de la position du point D sur le chemin de C à A où on débutera à creuser en ligne droite vers B, et des coûts respectivement en surface et sous terre de l'acheminement du câble.

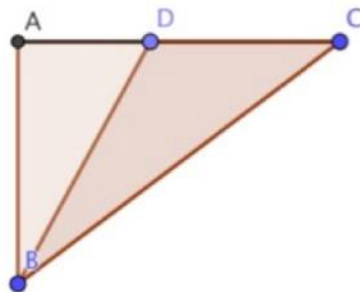


Figure 1 : représentation de la situation initiale

SITUATION PROBLÈME

2. Si l'on suit une route existante, le tracé en surface coûtera encore moins cher car les véhicules y auront facilement accès. Alors comment exploiter cette information pour minimiser les coûts?

Dans tous les cas, on pourrait considérer que la distance de C à B est de 50 mètres et que le point B se situe à 30 mètres de profondeur. On suppose aussi que le terrain est plat. On considère les coûts de l'installation sous terre à 700\$ le mètre, alors qu'en surface, c'est plutôt 400\$ le mètre, sauf si on suit une route. Dans ce cas le coût est de 300\$ le mètre.

GÉNÉRALISATION DU MODÈLE (EN DEVOIR)

Étudier la variation de la solution si l'on considère les valeurs que l'on vient d'indiquer comme des paramètres modifiables. Doit-on tout recommencer le travail si certaines de ces données diffèrent (changement de coût, du point de départ, etc.)? Le modèle permet-il de répondre à la question dans le cas général?

Bloc 1 (Individuel, 15 minutes)



1. Quelle stratégie utiliserais-tu pour avoir une vision claire du problème et de ce qui est demandé? À quel niveau scolaire crois-tu que cette stratégie serait accessible?

2. Réalise un schéma qui représente la situation en indiquant clairement tous les éléments connus.

3. Que faudrait-il déterminer pour pouvoir progresser vers la solution? Quelles sont les méthodes possibles pour déterminer ces éléments? À quel niveau scolaire chacune de ces méthodes est-elle accessible?

Bloc 2 (Équipes, 20 minutes)



4. Comparez vos réponses en 1., 2. et 3. au bloc 1. Avez-vous un portrait clair de la situation? Pouvez-vous énoncer explicitement le but visé?

5. Entendez-vous sur un plan d'attaque pour faire avancer la résolution du problème en précisant ce que la géométrie et l'algèbre peuvent apporter respectivement (à vous et aussi

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

à vos élèves). Allez-vous privilégier une approche papier-crayon-calculatrice ou un usage plus particulier de la technologie?

Bloc 3 (Grand groupe, 20 minutes)



Chaque équipe présente sa conception du problème et le cheminement envisagé pour s'approcher de la solution. Notez les idées intéressantes.

Bloc 4 (Équipes, 50 minutes)



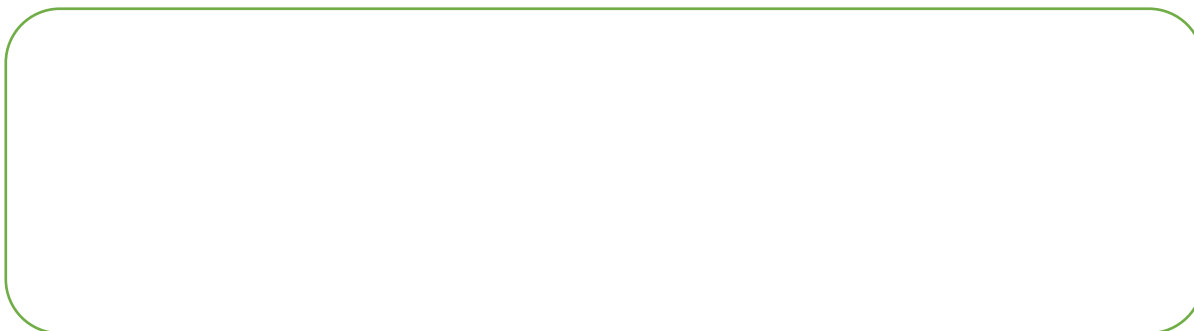
6. Réalisez votre plan d'action et indiquez tout changement à vos intentions initiales et ce qui les a occasionnés.

Bloc 5 (Grand groupe, 30 minutes)



Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

7. Chaque groupe présente ses résultats et on débat ensuite sur la validité des démarches et des résultats. Notez les idées intéressantes. L'enseignant en profite pour relier les idées présentées aux savoirs institutionnel.



Bloc 6 (Individuel, 45 minutes) auto-réflexion

RAPPEL DE L'ACTIVITÉ D'OPTIMISATION DU PRIX DE L'INSTALLATION DU CÂBLE

VOTRE NOM: _____

Repassez en revue les étapes qui ont été nécessaires à l'approche que vous avez privilégiée. Quel savoirs avez-vous mobilisés? Comment avez-vous gardé un contrôle sur votre activité mathématique? Que retenez-vous par rapport à l'usage de la technologie?

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

